L2 MTH1314 2014-2015

L'anneau produit

Enoncé

Soient $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux. On considère l'ensemble produit $A_1 \times A_2$ défini par,

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2),\ a_1 \in A_1 \text{ et } a_2 \in A_2\}.$$

On munit cet ensemble des lois $+$ et $\times$ définies par, pour tout $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ et tout $b = (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$,

$$a+b = (a_1, a_2)+(b_1, b_2) = (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2) \qquad \text{et} \qquad a \times b = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2).$$

Montrer alors que $(A_1 \times A_2, +, \times)$ est un anneau.

Solution

• On sait déjà (cf exercice 2) que $(A_1 \times A_2, +)$ est un groupe.
• La loi $+$ est commutative. En effet puisque $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times_2)$ sont deux anneaux, par définition, $+_1$ et $+_2$ sont commutatives. La commutativité de $+$ suit de la façon suivante. Soient $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ et $b = (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$,

$$\begin{aligned} a + b = (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2) &= (b_1 +_1 a_1, a_2 +_2 b_2) \qquad \text{car } +_1 \text{ est commutative} \\ &= (b_1 +_1 a_1, b_2 +_2 a_2) \qquad \text{car } +_2 \text{ est commutative} \\ &= (b_1, b_2) + (a_1, a_2) = b + a. \end{aligned}$$

• La loi $\times$ est associative. Soient $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, $b = (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ et $c = (c_1, c_2) \in A_1 \times A_2$,

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) = a \times (b_1 \times_1 c_1, b_2 \times_2 c_2) &= (a_1 \times (b_1 \times_1 c_1), a_2 \times (b_2 \times_2 c_2)) \\ &= ((a_1 \times b_1) \times_1 c_1, a_2 \times (b_2 \times_2 c_2)) \qquad \text{car } \times_1 \text{ est associative} \\ &= ((a_1 \times b_1) \times_1 c_1, (a_2 \times b_2) \times_2 c_2) \qquad \text{car } \times_2 \text{ est associative} \\ &= (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2) \times c = (a \times b) \times c. \end{aligned}$$

• La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$. Même principe, soient $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, $b = (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ et $c = (c_1, c_2) \in A_1 \times A_2$,

$$\begin{aligned} a \times (b + c) = a \times (b_1 +_1 c_1, b_2 +_2 c_2) &= (a_1 \times_1 (b_1 +_1 c_1), a_2 \times_2 (b_2 +_2 c_2)) \\ &= (a_1 \times_1 b_1 +_1 a_1 \times_1 c_1, a_2 \times_2 (b_2 +_2 c_2)) \qquad \text{car } \times_1 \text{ est distributive sur } +_1 \\ &= (a_1 \times_1 b_1 +_1 a_1 \times_1 c_1, a_2 \times_2 b_2 + a_2 \times_2 c_2) \qquad \text{car } \times_2 \text{ est distributive sur } +_2 \\ &= (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2) + (a_1 \times c_1, a_2 \times c_2) = a \times b + a \times c. \end{aligned}$$

• Il existe un élément neutre pour la loi $\times$. En effet, en notant 1_{A_1} l'élément neutre pour $\times_1$ dans l'anneau A_1 et 1_{A_2} l'élément neutre pour $\times_2$ dans l'anneau A_2, posons $1_{A_1 \times A_2} = (1_{A_1}, 1_{A_2})$ qui est bien un élément de $A_1 \times A_2$. On a alors, pour tout $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$,

$$\begin{aligned} 1_{A_1 \times A_2} \times a &= (1_{A_1}, 1_{A_2}) \times (a_1, a_2) \\ &= (1_{A_1} \times_1 a_1, 1_{A_2} \times_2 a_2) \\ &= (a_1, 1_{A_2} \times_2 a_2) \qquad \text{car } 1_{A_1} \text{ l'élément neutre pour } \times_1 \text{ dans } A_1 \\ &= (a_1, a_2) \qquad \text{car } 1_{A_2} \text{ l'élément neutre pour } \times_2 \text{ dans } A_2 \\ &= a. \end{aligned}$$

De même on montre que $a \times 1_{A_1 \times A_2} = a$.